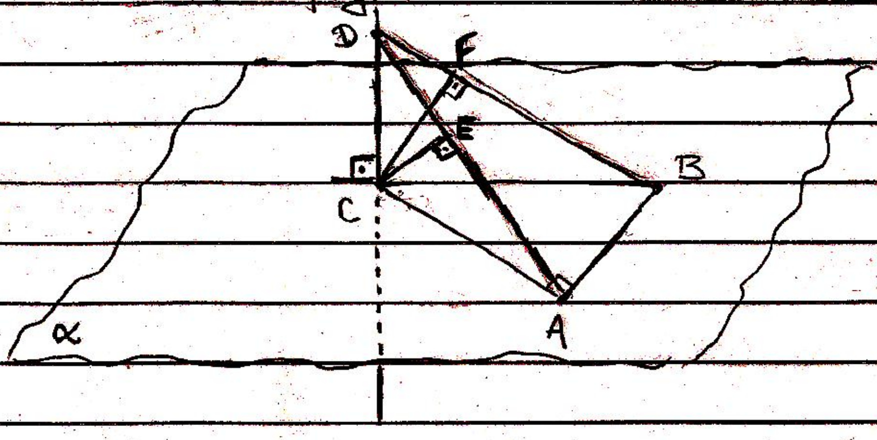
3) O ΔABC, reto em A, está contido em α. Sobre a perpendicular a α traçada por C tomamos o ponto D. Por C traçamos, por sua vez, as perpendiculares CE a AD e CF a BD. Mostre que:

a) $AB \perp AD$

b) $CE \perp EF$

c) $DF \perp EF$

Observe a figura:



a) $\underbrace{AD \subset ACD}_{\text{plano}}$

Se mostrarmos que $AB \perp ACD$*, então AB é ortogonal a todas as retas do plano ACD e, em particular, $AB \perp AD$.

*Para mostrar que $AB \perp ACD$, devemos mostrar que AB é ortogonal (ou perpendicular) com 2 retas distintas de ACD.

De fato, $AB \perp AC$ (pois o ΔABC é retângulo em A)

e $AB \perp CD$ (pois $CD \perp \alpha$, logo CD é ortogonal a todas as retas de α, em particular, $CD \perp AB$)

Segue que: $\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp ACD \Rightarrow AB \perp AD$ (c.q.m.)

(*)

b) Analogamente, devemos mostrar que $CE \perp ABD$, pois $EF \subset ABD$.

De fato, $\begin{cases} CE \perp AD \text{ (Por construção)} \\ CE \perp AB \text{ (Pois } CE \subset ACD \text{ e, do item a, } AB \perp ACD \Rightarrow AB \perp CE) \end{cases}$

$\Rightarrow CE \perp ABD \overset{(*)}{\Longrightarrow} CE \perp EF$ (reforçando, $EF \subset ABD$) (c.q.m)

c) Considere o plano CEF, se mostrarmos que DF é ortogonal a 2 retas distintas do plano CEF, então $DF \perp CEF$, consequentemente DF será ortogonal a todas as retas de CEF, em particular, $DF \perp EF$.

De fato, $\begin{cases} DF \perp CF \text{ (Por construção)} \\ DF \perp CE \text{ (Pois, do item b, } CE \perp ABD \text{ e } DF \subset ABD \text{, logo } CE \perp DF) \end{cases}$

$\Rightarrow DF \perp CEF \Rightarrow DF \perp EF$. (c.q.m.)