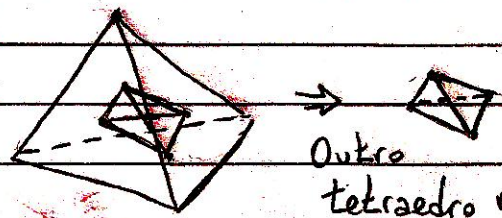
5) Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um:

a) Tetraedro regular? Resp. a)

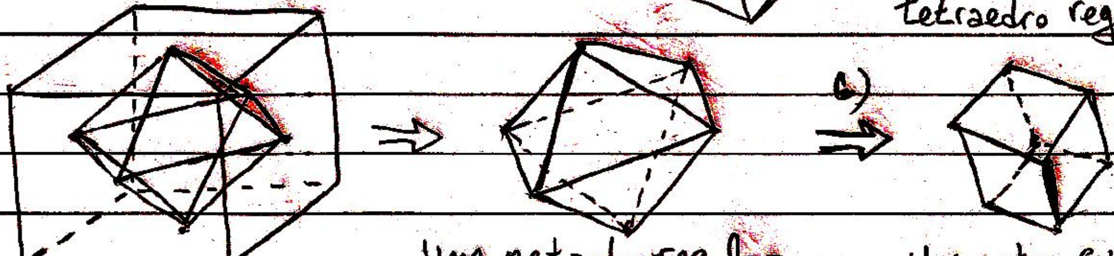
b) Cubo?

c) Octaedro regular?



Outro tetraedro regular

b)



Um octaedro regular   c)   Um outro cubo

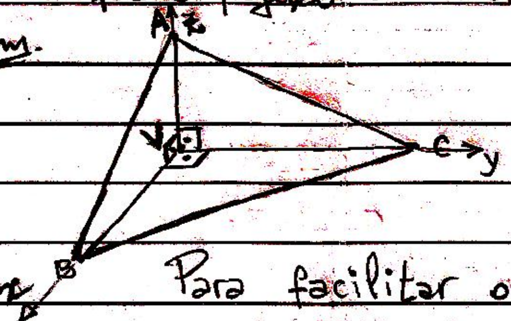
Obs: Se continuássemos o processo infinitamente, teríamos:

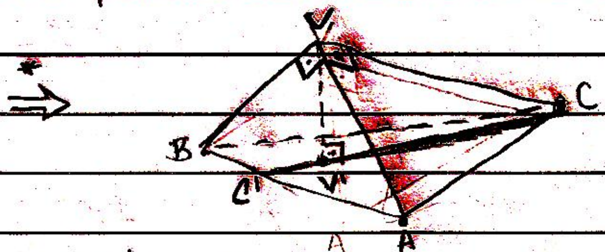
a) Tetraedro Regular $(TR_0) \rightarrow TR_1 \rightarrow TR_2 \rightarrow \dots \rightarrow TR_\infty$

b) Cubo $(C_1) \rightarrow$ Octaedro Regular $(OR_1) \xrightarrow[c)]{} C_2 \rightarrow OR_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_\infty \rightarrow OR_\infty$

6) Sejam VA, VB e VC três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do ΔABC.

Dem.





Para facilitar o entendimento, considere o "espaço cartesiano" (conforme a figura) onde V é a origem.

*Agora, fazendo uma rotação, temos um tetraedro.

Seja V' a projeção de V sobre o plano ABC.

Devemos mostrar que as 3 alturas relativas ao ΔABC passam pelo ponto V'.

De fato, seja $C' = AB \cap CV'$, se mostrarmos que $AB \perp CV'$ então CC' é uma das alturas do ΔABC e $V' \in CC'$. Note que:

$\left.\begin{array}{l} VC \perp VA \\ VC \perp VB \end{array}\right\} \Rightarrow VC \perp \underset{\text{Plano}}{ABV} \Rightarrow VC \perp AB \ (1)$

(por construção)

e ainda:

$\underset{\text{(construção)}}{VV' \perp ABC} \Rightarrow VV' \perp AB \ (2)$

De (1) e (2) $AB \perp \underset{\text{plano}}{CVV'} = AB \perp CVC'V' \Rightarrow AB \perp CC' = CV'$

Analogamente, mostramos que $AV' \perp BC$ e $BV' \perp AC$.

$\Rightarrow AB \perp CV'$