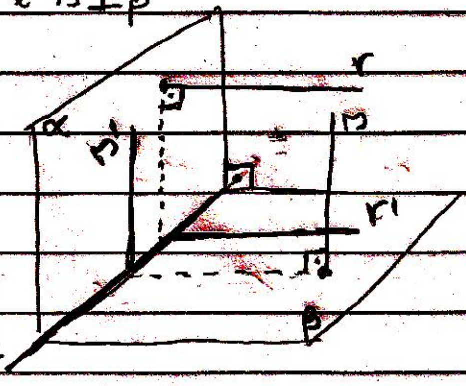
MA13_ Perpendicularismo

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom   / /

7) Mostre que 2 planos são perpendiculares se, e só se, 2 retas perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

Sol: ($\Rightarrow$) Hip.: $\alpha \perp \beta$ com $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$

Tese: $r \underset{orto}{\perp} s$



Sendo $\alpha \perp \beta$, considere $t = \alpha \cap \beta$.

Como $s \perp \beta$ e $\beta \perp \alpha$, segue que $s // \alpha$. Analogamente, $\beta \perp \alpha$ e $\alpha \perp r$, temos $\beta // r$.

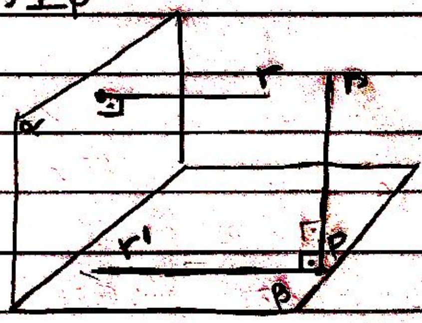
Seja $s' \subset \alpha$; $s' // s$ e $r' \subset \beta$; $r' // \beta$.

Como $s' // s$ e $s \perp \beta$, temos $s' \perp \beta$, logo $s' \perp t$ e analogamente $r' // r$ e $r \perp \alpha$, implica que $r' \perp \alpha$, logo $r' \perp t$.

Sendo assim $s' \underset{orto}{\perp} r'$ e portanto $s \underset{orto}{\perp} r$.

($\Leftarrow$) Hip.: $r \underset{orto}{\perp} s$ com $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$

Tese: $\alpha \perp \beta$



Seja $P = s \cap \beta$.

O plano β contém TODAS as retas perpendiculares a s passando por P.

Da Geometria Plana, sabemos que dado uma reta r um ponto P fora dela existe uma única reta r' tal que $r' // r$ e $P \in r'$.

Sendo assim, considere (na figura) a reta r e o ponto P, logo existe $r' // r$ passando por P. Como, por hipótese, $r \underset{orto}{\perp} s$ então $r' \perp s$ e $r' \cap s = P$, portanto $r' \subset \beta$.

Finalmente, $\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ r // r' \\ r' \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r' \perp \alpha \\ r' \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$