Números Complexos.

Q1) a) Resolva a seguinte equação " $\mathbf{x^2 - 2x + 2 = 0}$ ".

b) Existe solução? Por quê?

c) Faça $i = \sqrt{-1}$ e calcule x_1 e x_2.

d) Verifique por substituição e pela "soma e produto" que x_1 e x_2 solucionam a equação.

Definição → $\mathbb{C} = \{\, z\,;\ z = a + b.i,\ \ com\ \ a, b \in \mathbb{R}\ \ \ e\ \ \ i = \sqrt{-1}\ \}$
Onde: " a " é a parte real → $\mathrm{Re}(z) = a$ e " b " é a parte imaginária → $\mathrm{Im}(z) = b$

Q2) Considere $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 5 + 9i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 . z_2$ c) z_3, tal que $z_1 + z_3 = z_2$ d) z_4, tal que $z_1 . z_4 = z_2$

e) z_1^2 f) z_1^3 g) i^3 h) i^4 i) i^5 j) i^6 k) i^7 ℓ) i^{2018}

Conjugado.

Seja $z = a + b.i$, então o conjugado de z é $\bar{z} = a - b.i$

Q3) Determine o conjugado dos seguintes números complexos:
a) $z = 6 + 5i$ b) $w = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ c) $r = \sqrt{3}.i - \sqrt{2}$ d) $s = -2i$

<u>PROPRIEDADES DO CONJUGADO</u>
P_1) $z + \bar{z} = 2.(parte\ real)$
P_2) $z - \bar{z} = 2.(parte\ imaginária)$
P_3) $z.\bar{z} = a^2 + b^2$
P_4) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
P_5) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$

Q4) Demonstre as propriedades dos conjugados.

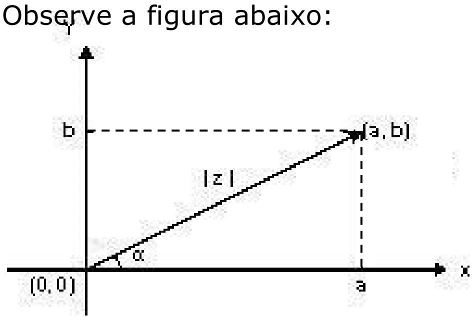
Q5) Calcule: a) $\frac{8+i}{2-i}$ b) $\frac{9+3i}{4-2i}$ c) $\frac{2-2i}{2+2i}$

Q6) (Mack – SP) Seja o número complexo $z = \dfrac{1-i}{1+i}$, então z^{1980} é:

a) 1 b) −1 c) i d) $-i$ e) $-2i$

Forma Trigonométrica.

Observe a figura abaixo:



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$a = |z|.cos\ \alpha$

$b = |z|.sen\ \alpha$

$\arg(z) = \alpha$

Substituindo na forma algébrica, temos:

$z = a + b.i \ \Leftrightarrow z = |z|.cos\ \alpha + |z|.sen\ \alpha\ .i$

$$\boxed{z = |z|.(cos\ \alpha + i.sen\ \alpha)}$$

Q7) Determine a forma trigonométrica do número complexo dado:

a) $1 + i$ b) $-4\sqrt{3} - 4i$ c) $-1 + i$ d) -3 e) $2i$

Q8) PROPRIEDADES DO MÓDULO → Mostre que:

a) $z.\bar{z} = |z|^2$ b) $|z| = |\bar{z}|$ c) $|z.w| = |z|.|w|$

1ª Fórmula de "*Moivre*" _ Potenciação.

Q9) Dados $z = |z|.(\cos\alpha + i.sen\ \alpha)$ e $w = |w|.(\cos\beta + i.sen\ \beta)$ e sabendo que $\cos(\alpha+\beta) = cos\ \alpha.cos\ b - sen\ \alpha.sen\ \beta$ e $\text{sen}(\alpha+\beta) = sen\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \beta \cdot cos\ \alpha$, calcule:

a) $z.w$ b) z^2 c) z^3 d) z^4 e) z^5

Generalizando: $\boxed{\mathbf{z^n = |z|^n .(cos\ n\alpha + i\ .\ sen\ n\alpha)}}$

Q10) Dado o número complexo z = 2.(cos $\pi/4$ + i.sen $\pi/4$) determine z^7 utilizando a fórmula de "*Moivre*", em seguida, represente-o na forma algébrica.

Q11) Calcule, utilizando a fórmula de "*Moivre*":

a) $(1 - i)^{10}$ b) $(3 - 3.i)^5$ c) $(\sqrt{2} + i.\sqrt{2})^7$ d) $(-1 - i.\sqrt{3})^{100}$

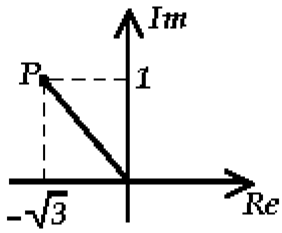
Exercícios.

Q12) (PUC) O número complexo z que verifica a equação $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$ é:
A) −1 + 2i B) 1 + i C) −1 + i D) −1 − i E) 1 − i

Q13) (MACK) Simplificando a expressão $\dfrac{(2+i)^{101} \cdot (2-i)^{50}}{(-2-i)^{100} \cdot (i-2)^{49}}$, obtém-se:

A) 1 B) − 5 C) 2 + i D) 5 E) 2 − i

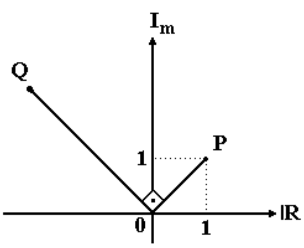
Q14) (FATEC) Na figura, o ponto P é o **<u>afixo</u>**[1] do número complexo z = x + yi no plano de Argand-Gauss.
É verdade que:
A) o **<u>argumento</u>**[2] principal de z é 5π/6.
B) a parte imaginária de z é i.
C) o conjugado de z é $\sqrt{3} + i$.
D) a parte real de z é 1.
E) o módulo de z é 4.



1) Ponto que representa o número complexo no plano.
2) ângulo trigonométrico do número complexo.

Q15) (UFAL) Sejam os números complexos $z_1 = 3 + 9i$ e $z_2 = -4 - 8i$. O argumento principal do número complexo $z_1 + z_2$ é: A) 90° B) 145° C) 120° D) 180° E) 135°

Q16) (MACK) Na figura, P e Q são, respectivamente, os afixos de dois complexos z_1 e z_2. Se a distância OQ é $2\sqrt{2}$, então é correto afirmar que:
A) $z_2 = 3z_1$ B) $z_2 = z_1^2$ C) $z_2 = 2z_1$ D) $z_2 = 3z_1^3$ E) $z_2 = z_1^3$



Q17) (UFPB) A representação cartesiana dos números complexos 1+2i, −2+i e −1−2i são vértices de um quadrado. O quarto vértice desse quadrado corresponde a:
A) 1 − i B) 2 − i C) 1 + i D) 1 − 2i E) − 2 − 2i

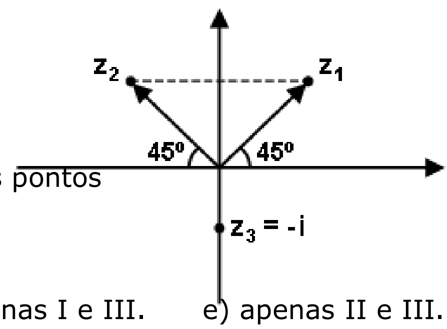
Q18) (USC) Se $z \in C$ tal que $z.\bar{z} = 24$, o módulo de z é:

A) $2\cdot\sqrt{3}$ B) $2\cdot\sqrt{6}$ C) 5 D) 12 E) 24

Q19) Um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem tem como um de seus vértices o afixo $z = 2i$. Que números complexos são representados pelos outros cinco vértices do hexágono?

Q20) (PUC) Considere a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 2^{3-n} + i\cdot 2^{4-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se i é a unidade imaginária, o módulo da soma dos infinitos termos dessa seqüência é:

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$ D) $6\sqrt{5}$ E) $8\sqrt{5}$



Q21) (UFSM) O gráfico mostra a representação geométrica dos números complexos z_1, z_2 e z_3. Sabendo que $|z_1| = |z_2|$, afirma-se o seguinte:

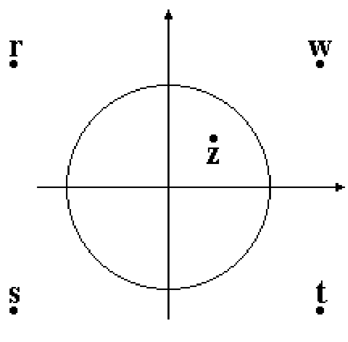
I) z_2 é o complexo conjugado de z_1.

II) Se $|z_1| = \sqrt{2}$, então a área do triângulo cujos vértices são os pontos z_1, z_2 e z_3 é igual a 4.

III) O número z_3/z_1 está localizado no 3º quadrante.

Está(ão) correta(s):

A) apenas II. B) apenas III. C) apenas I e II. d) apenas I e III. e) apenas II e III.



Q22) (Cesgranrio) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de centro na origem e raio 1, e as imagens de cinco números complexos. O complexo 1/z é igual a:

A) z B) w C) r D) s E) t

Q23) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representados pelos números complexos **z** e **w,** se $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}.\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ e $\mathbf{w} = \mathbf{z}^2$.

Nestas condições o jantar pode ter sido marcado pra:

A) 12 ou 6 horas B) 3 ou 15 horas C) 9 ou 21 horas D) 5 ou 17 horas