IFRN - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RN
www.ifrn.edu.br

AULAS DO 2º ANO DE MATEMÁTICA _ 1ª ETAPA DO 4º BIMESTRE

PROFESSOR: LUCIANO NÓBREGA
www.professorlucianonobrega.wordpress.com

ALUNO(A): ____

Aula 1 _ Matriz.

DEFINIÇÃO → Uma matriz é uma tabela de dados com "m" linhas e "n" colunas que contém "m · n" elementos.

Ângulo	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Q1) Dadas as seguintes matrizes, responda o que se pede:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 18 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

a) De que tipo (ordem) são as matrizes?

b) Qual o valor dos elementos: a_{23} ? $\quad b_{21}$? $\quad c_{32}$? $\quad d_{21}$? $\quad e_{12}$?

Q2) Escreva as matrizes:

$A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + j^3$

$B = (b_{ij})$ com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$ tal que $b_{ij} = 3j + 2i - 5$

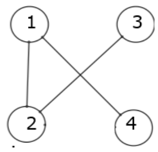
$C = (c_{ij})_{4x2}$ tal que $c_{ij} = 3i^2 - {}^{j}/_{i}$

D é uma matriz de ordem 2, tal que $d_{ij} = 4j - 3i$

E é uma matriz de ordem 3, tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, $a_{ij} = (i + j)^2$, para $i = j$ e $a_{ij} = -2$, para $i < j$.

Observe o diagrama ao lado:

F_4 (matriz de ordem 4) tal que $f_{ij} = 1$ se i estiver ligado a j, caso contrário, $f_{ij} = 0$.



Aula 2 _ Igualdade, Soma e Subtração de Matrizes

Igualdade de Matrizes → Duas matrizes, "$A = (a_{ij})_{m \times n}$" e "$B = (b_{ij})_{r \times s}$", são iguais se:

i) Tiverem a mesma ordem, ou seja, m = r e n = s; *ii*) $a_{ij} = b_{ij}$ para todo " i " e " j ".

Q3) a) Sabendo que $\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ 2b & 2a-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$, quais os valores de "a", "b", "c" e "d"?

b) Sabendo que $\begin{bmatrix} 3x+2y & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3x-3y \end{bmatrix}$ determine "x" e "y".

Soma e Subtração de Matrizes → Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem definimos por soma dessas matrizes a matriz tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. E, por diferença, $C_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Q4) Dadas as matrizes, efetue, quando possível:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

a) A + C b) A + B c) A – C d) C – A e) A – B f) 2.A – 5.C

Q5) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3x3}$ e $B = (b_{ij})_{3x3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$, determine A + B e A – B.

Aula 3 _ Multiplicação de Matrizes.

$\overset{*}{\text{Tem que ser igual!}}$

Multiplicação de Matrizes → Sejam as matrizes "$A_{m \times p}$" e "$B_{p \times n}$" então, por definição, o produto P = A.B é tal que: $\mathbf{p_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}}$

Traduzindo: Cada elemento de P é dado pela soma dos produtos ordenados dos elementos das linhas de A pelos elementos das colunas de B.

Q6) Observe as notas de um aluno e os pesos destas em cada bimestre.

	1º Bim	2º Bim	3º Bim	4º Bim
Português	70	50	40	60
Matemática	30	70	50	80

	Pesos
1º Bim	2
2º Bim	2
3º Bim	3
4º Bim	3

a) Determine (sem operar com as matrizes) a média final desse aluno nas duas disciplinas;

b) Calcule o produto entre as matrizes;

Q7) Considerando as matrizes da Q4, efetue, quando possível: a) A.B b) B.A c) A.C

Q8) Durante a 1ª fase da Copa do Mundo de Futebol (2010), o grupo G era formado por 4 países: Brasil, Portugal, Costa do Marfim e Coreia do Norte. Observe os resultados registrados na tabela:

	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	1	0
Portugal	1	2	0
C. Marfin	1	1	1
Coreia do N.	0	0	3

Pelo regulamento da Copa, a vitória vale 3 pontos, o empate vale 1 ponto e a derrota zero. Determine quantos pontos fez cada equipe.

Aula 4 _ Matriz Transposta e Matriz Inversa.

Q9) Dada uma matriz A, dizemos que a **Matriz Transposta** de A é a matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas.

Obtenha as matrizes transpostas das matrizes da Q2.

Propriedades da Matriz Transposta

$P_1)$ $(A^t)^t = A$ $P_2)$ $(A + B)^t = A^t + B^t$ $P_3)$ $(c.A)^t = c.A^t$ (com $c \in \mathbb{R}$) $P_4)$ $(A.B)^t = B^t.A^t$

Q10) Dada uma matriz A, quadrada, de ordem n, se existir uma matriz A^{-1}, de mesma ordem, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$, então A^{-1} é **Matriz Inversa** de A .

I_n é a Matriz Identidade → Matriz Quadrada de ordem n, com os elementos da D.P. iguais a 1 e demais elementos iguais a zero.

Seja as matrizes dadas a seguir, determine, se existir, a matriz inversa.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{Vmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{Vmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Q11) Determine as matrizes que satisfazem os sistemas:

a) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$ com A = [1 4 7] e B = [2 1 5]

b) $\begin{cases} 2X + 3Y = C + D \\ 3X - 4Y = C - D \end{cases}$ com C = [1 3 9] e B = [2 5 0]

Q12) Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{4x7}$, tal que $a_{ij} = i - j$; $B = (b_{ij})_{7x9}$, tal que $b_{ij} = i$ e C = AB. Determine o elemento C_{23}.

Q13) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule AB, BA, A^2, A^3, B^2 e B^3.

Q14) Suponha que a mensagem a ser enviada seja VEST. Para transmitir essa mensagem codificada gera-se uma matriz M_1 que, usando a correspondência numérica, resulta M_2. A seguir, considera-se uma matriz **C**, inversível, e multiplicando-se a matriz M_2 por C, obtêm-se P, que é a mensagem codificada a ser enviada na sequência [16 47 -1 55]. Qual mensagem é transmitida através da sequência [−11 14 − 3 45] ?

$M_1 = \begin{bmatrix} V & E \\ S & T \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} 21 & 5 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 16 & 47 \\ -1 & 55 \end{bmatrix}$

Aula 5 _ Determinantes.

DEFINIÇÃO → O determinante é um número, associado a uma matriz quadrada, obtido por meio de uma operação com todos os elementos da matriz.

Determinante de ordem 1

Dada uma matriz de ordem 1, o seu determinante é o próprio número real a_{11} .

Exs: M = [5] ⇨ det M = 5; A = [-3] ⇨ det A = −3.

Q15) Resolva o seguinte sistema considerando que as incógnitas são x e y. $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$

Determinante de ordem 2

Dada uma matriz de ordem 2, por definição o determinante associado a essa matriz é dado por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Q16) Calcule os determinantes das matrizes abaixo:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} sen\,x & cos\,x \\ -cos\,x & sen\,x \end{vmatrix}$

Regra de Sarrus* e Regra de Chió.

Determinante de ordem 3 (*somente para determinante de ordem 3)

1º PASSO → Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira;

2º PASSO → Multiplicamos "as diagonais principais" e, em seguida, as somamos.

Fazemos o mesmo com as "diagonais secundarias";

3º PASSO → Obtemos o determinante fazendo $\sum DP - \sum DS$

Q17) Resolva as equações:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & sec^2x & cossec^2x \\ sen^2x & 1 & 1 \\ cos^2x & tg^2x & cotg^2x \end{vmatrix} = x$$

Q18) Sendo $f(x) = 12x - x^2$ e $g(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$, qual o valor do determinante da matriz ao lado? $\begin{vmatrix} f(2) & f(1) & f(0) \\ g(2) & g(1) & g(0) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Regra de Chió (para determinante de qualquer ordem)

1º PASSO → *A matriz deve ter $a_{11} = 1$;

2º PASSO → Isola-se (elimina-se) a 1ª linha e a 1ª coluna;

3º PASSO → Para os demais elementos, aplicamos a seguinte fórmula: $\mathbf{a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{i1}.a_{1j}}$

***Caso contrário, podemos:**
i) Dividir a 1ª fila por a_{11} e, ao final, multiplicar o determinante por a_{11}.
ou **ii) Trocar duas filas de lugar e, ao final, multiplicar o determinante por "– 1".**

Q19) Calcule o determinante da matrizes ao lado utilizando a regra de Sarrus e a regra de Chió. $a)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} -2 & -6 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Q20) (UFCE) Determine a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

Aula 6 _ Teorema de Laplace e Propriedades dos Determinantes.

Teorema de Laplace → Para uma matriz A de ordem 4, escolhendo-se a 1ª linha, temos:

$$\textbf{Det A} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14}$$

onde A_{ij} é o "cofator", tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ e D_{ij} é o "menor complementar" dado pelo determinante associado à matriz de ordem 3, obtida em A eliminando-se a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij} considerado.

Q21) Sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule o determinante de A.

Q22) Utilizando o Teorema de Laplace, calcule o determinante das matrizes da Q19.

Propriedades dos Determinantes.

P1) Quando todos os elementos de uma fila são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

P2) Se duas filas de uma matriz são múltiplas (ou iguais), então seu determinante é nulo.

P3) Se os elementos de uma fila de uma matriz são <u>combinações lineares</u>* (*obtidas através de operações) dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

P4) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

P5) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

P6) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

P7) Teorema de Jacobi – O determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila, os elementos correspondentes de outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante.

P9) Teorema de Binet $\boxed{\det(AB) = \det A \,.\, \det B}$

P10) Determinante da Inversa $\boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$

P11) Multiplicação da Matriz por uma Constante $\boxed{\det(k.M_n) = k^n.\det M_n}$

Q23) Calcule os determinantes (utilizando as propriedades):

a) $\begin{vmatrix} ax & 2a & a^2 \\ x & 4 & 1 \\ 3x & 6 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ xy & y^3 & y \\ x^2 & y^2 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 4 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & ab & a & a^2b \\ b & bc & b & c \\ c & cd & c & b \\ d & da & d & d \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} f(2) & f(1) & f(0) \\ g(2) & g(1) & g(0) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ com $f(x) = 12x - x^2$ e $g(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$