

	IFRN - INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RN www.ifrn.edu.br
	AULAS DE "MATEMÁTICA III" DA 2ª ETAPA DO 2º BIMESTRE
	PROFESSOR: LUCIANO NÓBREGA
ALUNO(A): _____	

Polinômios.

Definição → Uma função polinomial é uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela relação

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Onde: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ denominados coeficientes;
 $x \in \mathbb{C}$ denominado variável; $n \in \mathbb{N}$ e a_0 é denominado termo independente.

Exs: São polinômios:

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 7$ c) $g(x) = 23 + i \cdot x^4$

Polinômio Nulo

d) $l(x) = 0$

Não são polinômios:

a) $f(x) = 2x^{-1} + 3$ b) $P(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^2} - 7x^{\frac{1}{2}} - 9$ c) $g(x) = 23 + i \cdot \sqrt{x^3}$ d) $l(x) = \sin x$

Q1) Calcule os valores de "a", "b", e "c" para os quais o polinômio

$P(x) = (a + b)x^2 + (a - b - 4)x + (b + 2c - 6)$ seja nulo.

https://www.youtube.com/watch?v=cRAIwet-II&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-

Valor Numérico.

O valor numérico de um polinômio $P(x)$ para $x = a$, é o número que se obtém substituindo x por "a" e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Ex: Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = 2$, é:

$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4 \iff P(2) = (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 + (2) - 4 \iff P(2) = 14$

OBS: Se $P(a) = 0$, então o número "a" é chamado de raiz do polinômio ou zero do polinômio.

Q2) Dado o polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 5$, calcule $P(2) - P(1) - P(0)$.

(VA da Q2 e Q3) https://www.youtube.com/watch?v=F0eynE4eEYg&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=2

Q3) Dado o polinômio $P(x) = (x^2 + 2)^2 \cdot (x^3 - 2)^5$, determine o que se pede em cada item:

- a) A soma dos coeficientes; b) O valor do termo independente.

QExtra1) Seja $f(x) = x^{13} + x^{12} + x^{11} + \dots + x^2 + x + 1$, determine:

(VA da QEx1 e QEx2) https://www.youtube.com/watch?v=9eV3_e9IWNM&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=3

- a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f(-1)$

QExtra2) Qual é a soma dos coeficientes de $(3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1)^3$?

Q4) Num polinômio $P(x)$, do 3º grau, sabe-se que o coeficiente de x^3 é 1. Se $P(1) = P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, calcule o valor de $P(-1)$.

https://www.youtube.com/watch?v=twPJgjAxVLC&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=4

QExtra3) Em uma função polinomial de grau 2, sabe-se que $f(2) = 0$, $f(-1) = 12$ e $f(0) = 6$. Determine o valor de $f(-3)$.

https://www.youtube.com/watch?v=gWc65orR6Aw&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=5

Igualdade de Polinômios.

Dizemos que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais quando os coeficientes dos termos correspondentes são iguais.

Ex: Sejam $P(x) = -5 + bx^2 + ax^3 + x$ e $Q(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$. Se $P(x) = Q(x)$, então $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -5$.

Q5) Sabendo-se que $P(x) = x^2 - 2x + 1$ e $Q(x) = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$.

Sendo $P(x) \equiv Q(x)$, calcule os valores de "a", "b" e "c".

(VA da Q5 e Q6) https://www.youtube.com/watch?v=57xhHXwktGo&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=6

Q6) Determine a e b de modo que $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{2x+6}{x^2-1}$

QExtra4) Calcule os valores de a , b , c e d para que o polinômio

$P(x) = a(x+c)^3 + b(x+d)$ seja idêntico a $Q(x) = -x^3 - 6x^2 - 15x - 14$.

https://www.youtube.com/watch?v=a8BD0TDU7rs&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=7

Operações Com Polinômios.

Enfatizaremos a divisão:

Sejam dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, com $D(x) \neq 0$.

Efetuar a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é determinar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$,

que satisfaça a condição $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ ou seja:

Dividendo = Divisor \times Quociente + Resto

$$\begin{array}{r} P(x) \overline{) D(x)} \\ R(x) \quad Q(x) \end{array}$$

Ex: Determinar o quociente de $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por $D(x) = x^2 + 3x - 2$.

(VA da Exemplo) https://www.youtube.com/watch?v=yF1eJEKcZn8&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=8

Resolução:

Aplicando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 3x - 2 \\ \hline x^2 - 2x + 1 \end{array} \right. \rightarrow Q(x) \\ \hline -x^4 - 3x^3 + 2x^2 \end{array}$$

Tirando a prova:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot (x^2 - 2x + 1) + (2x + 1) =$$

$$= x^4 + x^3 - 7x^2 + 7x - 2 + (2x + 1) =$$

$$= x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$$

$$2x + 1 \rightarrow R(x)$$

Q7) Efetue as seguintes divisões entre os polinômios abaixo e tire a prova:

(VA do item a) https://www.youtube.com/watch?v=GxVHqdaZam0&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=9

(VA do item b) https://www.youtube.com/watch?v=i9T60dDgEiY&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=10

a) $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ e $Q(x) = 2x^2 + 4x - 3$

b) $A(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ e $B(x) = x^2 - 3x - 4$

QExtra5) Efetue a divisão de $2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 1$ por $-x^2 + 3x - 1$ e, em seguida, faça a verificação.

(VA da QEx5, 1ª Parte) https://www.youtube.com/watch?v=jc5Ml0aG5Y&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=11

(VA da QEx5, 2ª Parte) https://www.youtube.com/watch?v=DHrTyPeJmMg&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=12

Teorema de D'Alembert (ou Teorema do Resto).

"O resto da divisão de $P(x)$ por $D(x) = ax + b$ é o valor de $P(x)$ quando $x = \frac{-b}{a}$."

Demonstração: $P(x) = D(x).Q(x) + r \Leftrightarrow P(x) = (ax + b).Q(x) + r$

Se $x = \frac{-b}{a}$, então: $P\left(\frac{-b}{a}\right) = \left[a\left(\frac{-b}{a}\right) + b\right].Q\left(\frac{-b}{a}\right) + r \Leftrightarrow P\left(\frac{-b}{a}\right) = r$

Q8) Calcule o resto da divisão de:

https://www.youtube.com/watch?v=PuJKIHQV4EE&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=13

- a) $A(x) = x^2 + 5x - 1$ por $B(x) = x + 1$
 b) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ por $D(x) = x - 1$
 c) $R(x) = 3x^2 - 2x - 3$ por $L(x) = 3x - 2$

Algoritmo de Briot-Ruffini.

Utilizamos este algoritmo para efetuar a divisão de um polinômio de $P(x)$ por $x - a$.

Ex: Determine a divisão de $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $D(x) = x - 2$.

Resolução:

RAIZ DO DIVISOR	COEFICIENTES DE P(x)					
2	3	-5	1		-2	
		$3 \cdot (2) - 5$	$1 \cdot (2) + 1$		$3 \cdot (2) - 2$	
Resposta: $Q(x) = 3x^2 + x + 3$	3	1	3		4	
$R(x) = 4.$	COEFICIENTES DE Q(x)				RESTO	

Observe que o grau de $Q(x)$ é uma unidade inferior ao de $P(x)$.

Q9) Utilizando o "Algoritmo de Briot-Ruffini", calcule o quociente e o resto de:

(VA do Ex e do item a) https://www.youtube.com/watch?v=WkB10669AHg&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=14

(VA dos itens b, c e d) https://www.youtube.com/watch?v=S_Rst9M_t6M&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=15

- a) $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$ por $D(x) = x + 3$ b) $P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x - 3$ por $D(x) = x - 5$
 c) $P(x) = x^4 + 3x^2 + x - 5$ por $D(x) = x + 2$ d) $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por $B(x) = x - 4$

QExtra6) Determine o quociente e o resto da divisão de $2x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $2x + 1$.

https://www.youtube.com/watch?v=P8vwEin_dCY&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=16

QExtra7) Calcule o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ por $D(x) = x - 4$.

https://www.youtube.com/watch?v=jWXY2CvUyvQ&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=17

QExtra8) Determine o polinômio de grau 2, que dividido por x , $x - 1$ e $x - 2$, respectivamente, deixa resto 4, 9 e 18.

https://www.youtube.com/watch?v=S2B3Imj3Zbw&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=18

Teorema do Fator.

Se c é uma raiz de um polinômio de $P(x)$, então $x - c$ é um fator de $P(x)$.

Demonstração:

Pelo Teorema de D'Alembert: $P(x) = D(x).Q(x) + r \Leftrightarrow P(x) = (x - c).Q(x) + p(c)$

Como c é uma raiz, então $p(c) = 0$.

Portanto, $P(x) = (x - c).Q(x)$

Q10) Dado $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$, determine o valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$ e, em seguida, escreva $P(x)$ como um produto de dois fatores.

https://www.youtube.com/watch?v=mMpXqFQvxTQ&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=19

Q11) Determine os valores de "a" e "b" para que o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $(x + 1)(x - 4)$.

https://www.youtube.com/watch?v=3mS7nUvP8l0&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=20

Q12) (FUMEC-MG) Determine "m" e "n" de modo que $P(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $(x + 1)(x - 2)$.

https://www.youtube.com/watch?v=SwtwxL0hmWI&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=21

Teorema do Fundamental da Álgebra.

Toda equação polinomial de grau n tem pelo menos uma, e no máximo n , raízes complexas.

Q13) Uma das raízes da equação " $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ " é 1. Resolva a equação.

(VA da Q13 e Q14) https://www.youtube.com/watch?v=UJpaMTvmzAA&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=22

Q14) Resolva a equação " $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ ", sabendo que -2 e 1 são raízes da equação.

Q15) Escreva um polinômio de grau 3 cujas raízes são apenas 1 , -1 e 2 .

(VA da Q15 e Q16) https://www.youtube.com/watch?v=RzJBz6pT8hI&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=23

Q16) Resolva a equação " $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$ ", sabendo que " i " é uma de suas raízes.

Pesquisa de Raízes de Uma Equação Com Coeficientes Inteiros.

Se o número racional $\frac{p}{q}$ (com p e q primos entre si) é raiz de uma equação polinomial com todos os coeficientes inteiros, então p é divisor do termo independente e q é divisor do coeficiente do termo de grau n .

Q17) Pesquise as raízes das equações:

(VA do item a) https://www.youtube.com/watch?v=ndEocThyVRg&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=24

(VA dos itens b e c) https://www.youtube.com/watch?v=k-vFXsW2zE4&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=25

(VA dos itens d, e & f) https://www.youtube.com/watch?v=qtQhUqqUkq8&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=26

a) $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

d) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

b) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

e) $4x^4 - 5x + 1 = 0$.

c) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

f) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

Q18) Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, sabendo que " $3 + i$ " é uma das raízes.

https://www.youtube.com/watch?v=-3WbPoKaA8w&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=27

Mais Exercícios.

Q19) Qual é o valor de " m " para que o polinômio $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + mx + 12$ seja divisível por $D(x) = x + 3$?

(VA da Q19 e Q20) https://www.youtube.com/watch?v=wMD8VyclDDI&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=28

Q20) (UFCE) Sabe-se que o polinômio $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + m$, no qual " m " é uma constante real, é divisível por $x - 2$. Qual é o quociente da divisão de f por $x + 1$?

QExtra9) O polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + m$, com $m \in \mathbb{C}$, é divisível por $x - 2$. Qual é o quociente da divisão de $P(x)$ por $x + 1$?

https://www.youtube.com/watch?v=zbFbBaVsbHM&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=29

Q21) Efetue a divisão de $P(x) = x^3 - (4 + 2i)x^2 + 9ix + 2$ e $D(x) = x - 2i$

(VA da Q21 e Q22) https://www.youtube.com/watch?v=YgoBPDipg4&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=30

Q22) Determine a, b e c de modo que se tenha para todo $x \in \mathbb{R}$: $\frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3$

Q23) Dados os polinômios $f(x) = x$, $g(x) = x^3 + x$ e $h(x) = 2x^3 + 5x$, determine os valores de a e b tais que $h(x) = af(x) + bg(x)$.

(VA da Q23 e Q24) https://www.youtube.com/watch?v=bPPOHAoIAy0&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=31

Q24) Qual é o polinômio do 2º grau que tem $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$?

Q25) Dividindo o polinômio $f(x) = x^2 - 3x + 5$ por um certo polinômio $D(x)$, obtemos o quociente $q(x) = x^2 + 1$ e o resto $r(x) = 3x - 5$. Qual é o polinômio $D(x)$?

(VA da Q25 e Q26) https://www.youtube.com/watch?v=Xdz9Ry0dCY&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=32

Q26) Determine "n" de modo que o polinômio $p(x) = nx^3 + (2n - 1)x^2 + (3n - 2)x + 4n$ seja divisível por $d(x) = x - 1$. Em seguida, obtenha o quociente de $p(x)/d(x)$.

Q27) Determine o polinômio do 2º grau que, dividido por x , $x - 1$ e $x - 2$ deixe, respectivamente, os restos 4, 9 e 18.

https://www.youtube.com/watch?v=tM9bTXHA3hY&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=33

Q28) Pesquise as raízes das equações:

(VA do item a) https://www.youtube.com/watch?v=0dXWgeV2lW8&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=34

(VA do item b) https://www.youtube.com/watch?v=qqbRiFCnvp8&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=35

(VA do item c) https://www.youtube.com/watch?v=XnQZ10yEO9k&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=36

a) $3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$.

b) $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$.

c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

QExtra10) Dividindo o polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2$ por um certo divisor, obtemos o quociente $x^2 + 1$ e o resto $3x - 5$. Determine o polinômio divisor.

https://www.youtube.com/watch?v=c7gXK3HA4Hg&list=PL8h7ul8O7d8UTfoTn7pu5_S8_3_o24kA-&index=37